

Приложение 6  
к рабочей программе

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДЕНЫ

на заседании кафедры  
шахматного искусства и  
компьютерной математики

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ  
КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ  
по дисциплине  
Математика

Прежде чем приступить к выполнению контрольной работы необходимо ознакомиться с теоретическим материалом. Рекомендуется также изучить Методические указания к решению задач (в конце данного пособия). Выбор варианта осуществляется с приведенной ниже таблицей. Работу следует сдать на проверку не позднее, чем за 3 дня до зачета/экзамена. Проверенная работа может быть возвращена на доработку. В этом случае студент выполняет работу над ошибками и сдает работу повторно.

Важно: работу следует загружать **одним** файлом (или архивом)

### ***Рекомендации по изучению разделов и тем дисциплины***

#### *Тема 1. Введение в математический анализ.*

Необходимо добросовестно освоить, уточнить, запомнить понятие множества, операции над множеством, логическую символику, обозначения, чтобы Вы могли понимать преподавателя.

Обратите внимание на следующие понятия: простейшие и элементарные функции; способы задания функции; числовая последовательность; монотонность, ограниченность последовательности; пределы функций; правила раскрытия неопределенностей при вычислении пределов.

Понятие предела являются основными в современной математике. При самостоятельной работе по данной теме следует основательно отработать технику вычисления предела, приемы раскрытия неопределенностей.

#### *Тема 2. Основы дифференциального и интегрального исчисления функций одной переменной.*

Понятие производной и предела являются основными в современной математике. Запомнить таблицу основных производных. Уметь вычислять производные сложных функций. Теория одного раздела курса используется во многих прикладных задачах экономики.

Понятие первообразной и интеграла дополняют понятия производной и дифференциала. Ввиду этого студенту необходимы прочные знания дифференциального исчисления. Нужно иметь навыки выполнения преобразований элементарных функций. При самостоятельной работе по данной теме следует основательно отработать технику вычисления интегралов различного типа. Обратите внимание на особенности вычисления определенных интегралов, поскольку в понятия определенного интеграла присутствуют важнейшие математические операции: сумма и предел.

### *Тема 3. Функции нескольких переменных.*

Рекомендуется обратить внимание на изучение понятий: частные производные, их геометрический смысл, градиент поля, полный дифференциал, свойство смешанных производных, экстремума функции двух переменных.

### *Тема 4 Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.*

Все понятия, которые рассматриваются в рамках этой темы, являются необходимыми при изучении дисциплины. Обратите внимание на следующие понятия: скалярные величины, вектор, матрица; определитель, минор; система линейных уравнений; система линейных неравенств.

Рекомендуется обратить внимание на изучение тем: Прямая на плоскости. Виды уравнения прямой на плоскости. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Уравнения плоскости. Взаимное расположение плоскостей. Прямая в пространстве. Плоскость и прямая в пространстве.

### *Тема 5 Методы оптимальных решений.*

Изучение этой темы начинают с изучения составления математических моделей. Особое внимание необходимо уделить графическому методу решения задач линейного программирования, алгоритму в решении задач симплексным методом.

### *Тема 6 Основы теории вероятностей.*

При изучении случайных событий необходимо усвоить следующее: элементарное событие; вероятностное пространство; достоверное событие, невозможное событие, случайное событие; основные комбинаторные схемы и правила; классический способ подсчета вероятности; дискретная вероятностная схема; геометрическая вероятность; несобственные события; зависимые и независимые события; условная вероятность; формула полной вероятности и формула Байеса; схема независимых испытаний Бернулли.

При изучении случайных величин необходимо осознанно усвоить следующие понятия: случайная величина; закон распределения случайных величин; функция распределения случайной величины; дискретные и непрерывные случайные величины; плотность распределения случайной величины; числовые характеристики случайной величины; случайный процесс.

При изучении случайных величин необходимо повторить дифференциальное и интегральное исчисление, поскольку оно существенно используется при нахождении числовых характеристик непрерывной случайной величины. Следует обратить особое внимание на нормальное распределение, которое играет важную роль в математической статистике.

## ДОМАШНЯЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

1 семестр

В каждом задании указывается номер варианта (всего 10 вариантов).

Каждый студент выполняет свой вариант.

### Выбор вариантов

Начальные буквы фамилий студентов	Вариант
А, Б	1
В, Г	2
Д, Е, Ж	3
З, И, К,	4
Л, М	5
Н, О, П	6
Р, С	7
Т, У, Ф, Х	8
Ц, Ч, Ш, Щ	9
Э, Ю, Я	10

1. Вычислить пределы.

Вариант 1. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+x+1}{x^2-x}$  б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 2x}$  в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{9}{x}\right)^{x+2}$

Вариант 2. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x+3x^2}{2x^2-1}$  б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}$  в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{x}\right)^{2x+1}$

Вариант 3. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3-x+1}{x^2-x^3}$  б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 4x}{\operatorname{tg} 3x}$  в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{x}\right)^{3x+1}$

Вариант 4. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+x^3}{2x^3+x+2}$  б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{4 \sin 2x}$  в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{2x+5}$

Вариант 5. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+5}{x^2+x-1}$  б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}$  в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^{4x+3}$

Вариант 6. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2+x-2}{x-4x^2}$  б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{5 \sin 2x}$  в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{6}{x}\right)^{x+1}$

Вариант 7. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+100x}{2x^3-4x^2+1}$  б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{4 \operatorname{tg} 3x}$  в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{10x-3}$

Вариант 8. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2-7x}{7x^2+4}$  б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{tg} 7x}{\sin 2x}$  в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{8}{x}\right)^{2x+1}$

Вариант 9. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3+x^2-x}{2-5x-2x^3}$  б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 10x}$  в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{10}{x}\right)^{3x}$

Вариант 10. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+x^2-x}{3-5x-3x^3}$  б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 11x}{\operatorname{tg} 2x}$  в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{7}{x}\right)^{5x+1}$

2. Найти первую производную функции:

Вариант 1.  $y=(2x-1)\ln(2x+5)$

Вариант 8.  $y=(4x+10)\ln(2x-7)$

Вариант 2.  $y=(7x+2)\ln(x-2)$

Вариант 9.  $y=(3x-4)\ln(5x-1)$

Вариант 3.  $y=(5x-3)\ln(4x-1)$

Вариант 10.  $y=(2x+5)\ln(7x-5)$

Вариант 4.  $y=(3x+5)\ln(2x-7)$

Вариант 5.  $y=(4x-1)\ln(5x-1)$

Вариант 6.  $y=(7x-1)\ln(4x-1)$

Вариант 7.  $y=(2x+3)\ln(2x+3)$

3. Найти неопределенный интеграл:

Вариант 1. а)  $\int (2x+1)^{20} dx$  б)  $\int xe^{-x+2} dx$  в)  $\int \frac{dx}{x^2+8x-9}$

Вариант 2. а)  $\int (7x-1)^{23} dx$  б)  $\int xe^{-2x-3} dx$  в)  $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$

Вариант 3. а)  $\int (5x+2)^5 dx$  б)  $\int xe^{-x+1} dx$  в)  $\int \frac{dx}{1+x+x^2}$

Вариант 4. а)  $\int (4-2x)^7 dx$  б)  $\int xe^{2x-1} dx$  в)  $\int \frac{dx}{x^2-3x+1}$

Вариант 5. а)  $\int (3x+1)^9 dx$  б)  $\int xe^{x+1} dx$  в)  $\int \frac{dx}{x^2+4x-5}$

Вариант 6. а)  $\int (6x-1)^{14} dx$  б)  $\int xe^{\frac{1}{2}x+1} dx$  в)  $\int \frac{dx}{x^2+3x+1}$

Вариант 7. а)  $\int (5-3x)^{21} dx$  б)  $\int xe^{3x+2} dx$  в)  $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$

Вариант 8. а)  $\int (2x+4)^{22} dx$  б)  $\int xe^{-\frac{1}{2}x+1} dx$  в)  $\int \frac{dx}{4+2x+x^2}$

Вариант 9. а)  $\int (5-7x)^2 dx$  б)  $\int xe^{x-\frac{1}{2}} dx$  в)  $\int \frac{dx}{x^2-4x+8}$

Вариант 10. а)  $\int (5x+1)^8 dx$  б)  $\int xe^{4x-1} dx$  в)  $\int \frac{dx}{x^2-2x+7}$

4. Вычислить определенный интеграл:

Вариант 1. а)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$  ; б)  $\int_1^e (x+1) \ln x dx$

Вариант 2. а)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 5x dx$  ; б)  $\int_1^{e^2} \sqrt{x} \ln x dx$

Вариант 3. а)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx$  ; б)  $\int_1^e x^3 \ln x dx$

Вариант 4. а)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 5x dx$  ; б)  $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$  .

Вариант 5. а)  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx$  ; б)  $\int_1^e x^2 \ln x dx$

Вариант 6. а)  $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos 4x dx$  ; б)  $\int_1^e (x+2) \ln x dx$  .

Вариант 7. а)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 6x dx$  ; б)  $\int_1^e x \ln x dx$

Вариант 8. а)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$  ; б)  $\int_1^e (x+3) \ln x dx$  .

Вариант 9. а)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x dx$  ; б)  $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$  .

Вариант 10. а)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 6x dx$  ; б)  $\int_1^e x^4 \ln x dx$  .

5. Решить систему уравнений:

а) методом Крамера,

б) методом Гаусса

Вариант 1. 
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -4 \end{cases}$$

Вариант 6. 
$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 4 \end{cases}$$

Вариант 2. 
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 8 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$$

Вариант 7. 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Вариант 3. 
$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 - x_3 = 47 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 30 \end{cases}$$

Вариант 8. 
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Вариант 4. 
$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$$

Вариант 9. 
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases}$$

Вариант 5. 
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 13 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$$

Вариант 10. 
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

6. По координатам вершин треугольника ABC найти:

а) периметр треугольника;

б) уравнения сторон AB и BC; уравнение высоты AD.

Сделать чертеж.

Вариант 1. A(1;2); B(-1;2); C(3;0).

Вариант 2. A(3;3); B(-3;-3); C(3;5).

Вариант 3. A(-1;1); B(5;1); C(3;7).

Вариант 4. A(3;1); B(3;-5); C(-1;-1).

Вариант 5. A(0;5); B(5;0);

C(9;3).

Вариант 6. A(0;0); B(8;2); C(-2;6).

Вариант 7. A(-1;4); B(-1;2); C(-7;3).

Вариант 8. A(2;-1); B(5;3); C(5;-2).

Вариант 9. A(3;-3); B(7;-3); C(5;5).

Вариант 10. A(9;0); B(5;5); C(0;3).

**Методические указания к решению задач**

**1. Вычислить пределы:**

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 6x + 1}{6x^2 - x}$

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 20x}{\operatorname{tg} 7x}$

в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{3x+2}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{4x+1}$

г)

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+3}\right)^{x+2}$

д)

*Решение:*

а) Имеем  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 6x + 1}{6x^2 - x} =$  (разделим числитель и знаменатель на старшую степень)

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{7x^2}{x^2} + \frac{6x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)}{\left(\frac{6x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(7 - \frac{6}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{\left(6 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(7 - \frac{6}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(6 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{7 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}}{6 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}} = \frac{7}{6}.$$

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 20x}{\operatorname{tg} 7x} = \left[ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \right]$  *воспользуемся первым замечательным пределом*

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 20x}{\sin 7x / \cos 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 20x \cos 7x}{\sin 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 20x}{\sin 7x} \lim_{x \rightarrow 0} \cos 7x = \left( \lim_{x \rightarrow 0} \cos 7x = 1 \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 20x \cdot 20x \cdot 7x}{20x \sin 7x \cdot 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 20x}{20x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\sin 7x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{20x}{7x} =$$

$$= \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 20x}{20x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\sin 7x} = 1 \right) = \frac{20}{7}.$$

$$в) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{3x+2} =$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{воспользуемся вторым замечательным пределом} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e \end{array} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5} \cdot \frac{5}{x} (3x+2)} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5} \cdot \frac{15x+10}{x}} \right] = \left[ \begin{array}{l} t = \frac{x}{5} \\ t \rightarrow \infty \end{array} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15x+10}{x}} = e^{15}$$

$$г) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{4x+1} =$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{воспользуемся вторым замечательным пределом} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \end{array} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{-3}{x}\right)^{\frac{x}{-3} \cdot \frac{-3}{x} (4x+1)} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{-3}{x}\right)^{\frac{x}{-3} \cdot \frac{-12x-3}{x}} \right] = e^{-12}$$

$$д) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+3}\right)^{x+2} =$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{воспользуемся вторым замечательным пределом} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \text{ и следствиями: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{m}{x}\right)^x = e^m, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{nx+p} = e^{kn} \end{array} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{x+4}{x}\right)^{x+2}}{\left(\frac{x+3}{x}\right)^{x+2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x}\right)^{x+2}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^{x+2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^x \overset{1}{\uparrow} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^2}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x \underset{1}{\downarrow} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^2} = \frac{e^4}{e^3} = e.$$

=

2. Найти первые производные функций:

$$y = \frac{x^9 + 9}{10}$$

а)

$$y = (2x + 1)\ln(3x + 10)$$

б)

Решение:

$$y = \frac{x^9 + 9}{10}, \quad y' = \frac{1}{10}(x^9 + 9)' = \frac{1}{10}(x^9)' + (9)' = \frac{1}{10}(9x^8 + 0) = \frac{9}{10}x^8.$$

а) Имеем

б)

$$y' = [(2x + 1)\ln(3x + 10)]' = (2x + 1)' \ln(3x + 10) + (2x + 1)[\ln(3x + 10)]' = 2\ln(3x + 10) + (2x + 1) \frac{3}{3x + 10} = 2\ln(3x + 10) + \frac{3(2x + 1)}{3x + 10}.$$

3. Вычислить неопределенные интегралы:

а)  $\int (3x - 4)^{11} dx$ ; б)  $\int x^2 e^{2x+3} dx$ ; в)  $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 4}$  г)  $\int \sin^3 x \cos^8 x dx$

Решение:

а)  $\int (3x - 4)^{11} dx$

Сделаем замену  $3x - 4 = t$ , отсюда  $3dx = dt, \quad dx = \frac{1}{3} dt$

$$\int (3x - 4)^{11} dx = \frac{1}{3} \int t^{11} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{11+1}}{11+1} = \frac{1}{36} \cdot t^{12} + C$$

Возвратившись к старой переменной, имеем

$$\int (3x - 4)^{11} dx = \frac{1}{36} \cdot (3x - 4)^{12} + C$$

б)  $\int x^2 e^{2x+3} dx$

Интегрируем «по частям»:  $\int u dv = uv - \int v du.$

Пусть  $u = x^2$ , тогда  $dv = e^{2x+3} dx$

$$du = 2x dx, \quad v = \int e^{2x+3} dx = [2x+3 = z, dz = 2dx] = \frac{1}{2} \int e^z dz = \frac{1}{2} e^z = \frac{e^{2x+3}}{2}, \quad v = \frac{1}{2} e^{2x+3}$$

Имеем 
$$\int x^2 e^{2x+3} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2x+3} - \frac{1}{2} \int e^{2x+3} 2x dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2x+3} - \int x e^{2x+3} dx$$

Интеграл  $\int x e^{2x+3} dx$  вычислим, снова применяя формулу интегрирования по частям.

Пусть  $u = x$ , тогда  $dv = e^{2x+3}$ ,  $du = dx$ ,  $v = \frac{1}{2} e^{2x+3}$

$$\int x e^{2x+3} dx = \frac{1}{2} x e^{2x+3} - \frac{1}{2} \int e^{2x+3} dx = \frac{1}{2} x e^{2x+3} - \frac{1}{4} e^{2x+3} + C$$

Таким образом, исходный интеграл равен

$$\int x^2 e^{2x+3} = \frac{1}{2} x^2 e^{2x+3} - \frac{1}{2} x e^{2x+3} + \frac{1}{4} e^{2x+3} + C$$

в) 
$$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 4} = \int \frac{dx}{(x^2 - 2 \cdot 3x + 9) - 9 + 4} = \int \frac{dx}{(x-3)^2 - 5} = \int \frac{d(x-3)}{(x-3)^2 - (\sqrt{5})^2} =$$
  
$$= \int \frac{dt}{t^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{t-a}{t+a} \right| = \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{x-3-\sqrt{5}}{x-3+\sqrt{5}} \right| + C.$$

г) 
$$\int \sin^3 x \cos^8 x dx$$

Полагая  $\cos x = t$ ,  $-\sin x dx = dt$ , получим

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cos^8 x dx &= \int \sin^2 x \cos^8 x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^8 x \sin x dx = \\ &= - \int (1 - t^2) t^8 dt = - \int t^8 dt + \int t^{10} dt = - \frac{1}{9} t^9 + \frac{1}{11} t^{11} + C = \\ &= - \frac{1}{9} \cos^9 x + \frac{1}{11} \cos^{11} x + C \end{aligned}$$

#### 4. Вычислить определенные интегралы.

а) 
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 8x dx$$

б) 
$$\int_1^e (x-2) \ln x dx$$

в) 
$$\int_0^{10} \sqrt{100 - x^2} dx$$

Решение:

$$\text{а) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 8x dx = -\frac{1}{8} \cos 8x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{8} (\cos 2\pi - \cos 0) = 0$$

$$\text{б) } \int_1^e (x-2) \ln x dx$$

Интегрируем «по частям»

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Пусть  $u = \ln x$ , тогда  $dv = (x-2)dx$ ,

$$du = \frac{dx}{x}, v = \int (x-2)dx = \int x dx - 2 \int dx = \frac{x^2}{2} - 2x, \quad v = \frac{x^2}{2} - 2x$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \int_1^e (x-2) \ln x dx &= \ln x \left( \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_1^e - \int_1^e \left( \frac{x^2}{2} - 2x \right) \cdot \frac{dx}{x} = \\ &= \ln x \cdot \left( \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx + 2 \int_1^e dx = \frac{e^2}{2} - 2e - \frac{1}{4} x^2 \Big|_1^e + 2x \Big|_1^e = \\ &= \frac{1}{2} e^2 - 2e - \left( \frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{4} \right) + 2(e-1) = \frac{1}{2} e^2 - 2e - \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} + 2e - 2 = \frac{1}{4} e^2 - \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

$$\int_0^{10} \sqrt{100 - x^2} dx$$

в)

Интегрируем подстановкой.

Положим  $x = 10 \sin t$ , тогда  $dx = 10 \cos t dt$ . Если  $x = 0$ , то  $t = 0$ ; если

$$x = 10, \text{ то } t = \frac{\pi}{2}.$$

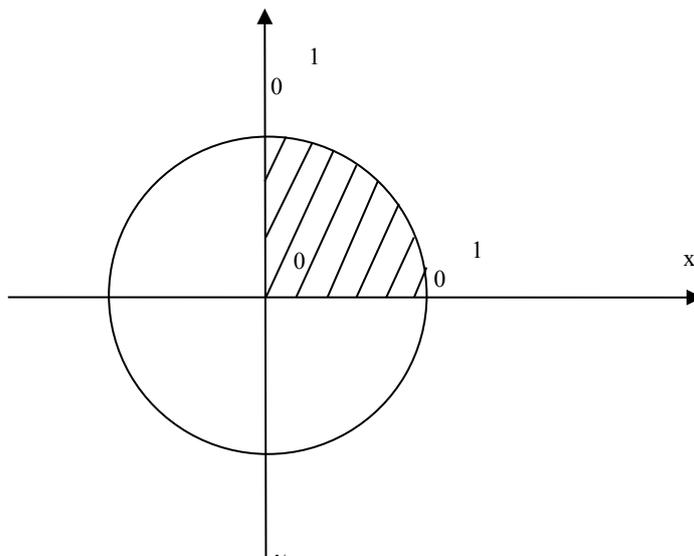
Поэтому

$$\int_0^{10} \sqrt{100 - x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{100 - 100 \sin^2 t} \cdot 10 \cos t dt = 100 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \Rightarrow \left[ \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2} \right] =$$

$$= 100 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = 50 \cdot \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 50 \left[ \left( \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \pi \right) - \left( 0 + \frac{1}{2} \sin 0 \right) \right] =$$

$$= 50 \cdot \left( \frac{\pi}{2} \right) = 25\pi$$

Заметим, что геометрически данный интеграл есть площадь круга:  $x^2 + y^2 \leq 100$ ,  $0 \leq x \leq 10$ ,  $0 \leq y \leq 10$ .



5. Решить систему уравнений:

а) методом Крамера,

б) методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = -18 \end{cases}$$

Решение:

а) Метод Крамера.

Найдем определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) + (-3) \cdot (-3) \cdot (-1) - 1 \cdot 2 \cdot (-1) -$$

$$- (-3) \cdot 1 \cdot 5 - 2 \cdot (-1) \cdot (-3) = 20 - 1 - 9 + 2 + 15 - 6 = 21$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -7 & -3 & 1 \\ 14 & 2 & -3 \\ -18 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 21 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 1 & 14 & -3 \\ -1 & -18 & 5 \end{vmatrix} = 42 \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 14 \\ -1 & -1 & -18 \end{vmatrix} = -63$$

Теперь находим  $x_1, x_2$  и  $x_3$ :

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{21}{21} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{42}{21} = 2; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-63}{21} = -3;$$

Итак,  $x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -3$

б) Метод Гаусса.

Составим расширенную матрицу системы и путем элементарных преобразований приведем данную матрицу системы к треугольному виду (под главной диагональю нули).

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & -3 & 14 \\ -1 & -1 & 5 & -18 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 2 & -3 & 1 & -7 \\ -1 & -1 & 5 & -18 \end{array} \right) \sim$$

(для упрощения вычислений поменяем местами 1-ю и 2-ю строки;

умножим 1-ю строку на -2 и прибавим ко 2-ой строке,  
1-ю строку прибавим к 3-ей строке)

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 0 & -7 & 7 & -35 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{array} \right) \sim$$

(2-е уравнение разделим на -7)

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{array} \right) \sim$$

(2-ю строку умножим на -1 и прибавим к 3-ей строке)

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{array} \right)$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14 \\ x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_3 = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 9 = 14 \\ x_2 + 3 = 5 \\ x_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 4 - 9 = 14 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -3 \end{cases}$$

Итак,  $x_1=1$ ,  $x_2=2$ ,  $x_3=-3$ .

6. Треугольник задан вершинами  $A(1;1)$ ;  $B(-2;1)$ ;  $C(-1;6)$ . Найти:

- периметр треугольника;
- уравнения сторон треугольника; уравнение высоты  $AD$ .
- угол  $ABC$ ;
- площадь треугольника.

*Сделать чертеж.*

*Решение:*

а) Для нахождения периметра  $P$  применим формулу:

$$P = AB + BC + AC.$$

Длины сторон найдем по формуле расстояния между двумя точками:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (1 - 1)^2} = \sqrt{9 + 0} = 3$$

$$BC = \sqrt{(-1 + 2)^2 + (6 - 1)^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$$

$$AC = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (6 - 1)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$$

Итак, периметр треугольника  $P_{ABC} = 3 + \sqrt{26} + \sqrt{29}$ .

б) Для отыскания уравнений сторон треугольника используем уравнение прямой, проходящей через две данные точки  $M_1(x_1; y_1)$  и

$$M_2(x_2; y_2): \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$AB: A(x_1, y_1) B(x_2, y_2): \frac{y - 1}{1 - 1} = \frac{x - 1}{-2 - 1} \Rightarrow \frac{y - 1}{0} = \frac{x - 1}{-3} \Rightarrow y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$$

BC:

$$B(x_1, y_1) C(x_2, y_2): \frac{y - 1}{6 - 1} = \frac{x + 2}{-1 + 2} \Rightarrow \frac{y - 1}{5} = \frac{x + 2}{1} \Rightarrow y - 1 = 5x + 10 \Rightarrow y = 5x + 11$$

AC:

$$A(x_1, y_1) C(x_2, y_2): \frac{y - 1}{6 - 1} = \frac{x - 1}{-1 - 1} \Rightarrow \frac{y - 1}{5} = \frac{x - 1}{-2} \Rightarrow -2y + 2 = 5x - 5 \Rightarrow y = -\frac{5}{2}x + \frac{7}{2}$$

Для нахождения уравнения высоты  $AD$  находим угловой коэффициент прямой  $BC$ :  $k_{BC} = 5$ .

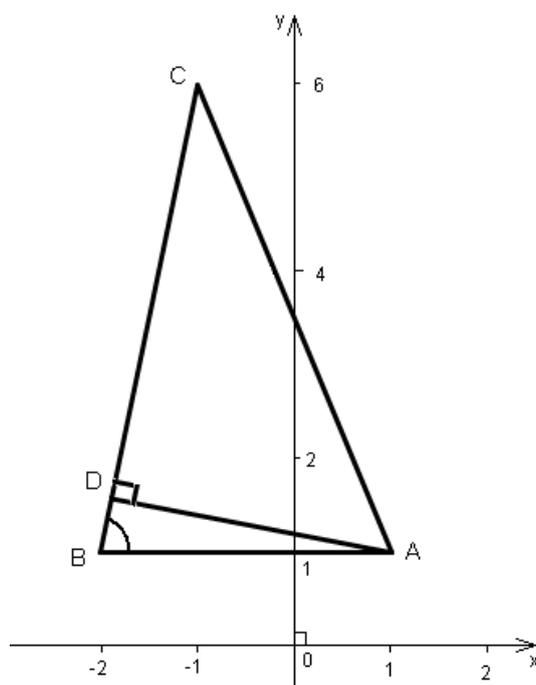
Так как прямые  $AD$  и  $BC$  перпендикулярны, то воспользуемся условием перпендикулярности прямых:

$$k_{AD} = -\frac{1}{k_{BC}} \Rightarrow k_{AD} = -\frac{1}{5}$$

Находим уравнение высоты  $AD$ , используя формулу уравнения прямой проходящей через т.  $M(x_1; y_1)$  в данном направлении:

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

$$AD: k = -\frac{1}{5}, A(1; 1) \quad y - 1 = -\frac{1}{5}(x - 1) \Rightarrow y - 1 = -\frac{x}{5} + \frac{1}{5} \Rightarrow y = -\frac{x}{5} + \frac{6}{5}$$



в) Для определения угла  $ABC$  треугольника используем формулу тангенса угла между двумя прямыми, угловые коэффициенты которых соответственно равны  $k_1$  и  $k_2$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|, \text{ где } \alpha \in \left[ 0; \frac{\pi}{2} \right]$$

$$k_{AB} = 0; \quad k_{BC} = 5; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{1} = 5, \quad \alpha = \operatorname{arctg} 5.$$

г) Площадь треугольника найдем, используя формулу  $S_{\Delta} = \frac{1}{2} a \cdot h$ .

Основанием треугольника выберем отрезок  $BC$ , а высотой соответственно отрезок  $AD$ . Тогда  $S_{\Delta} = \frac{1}{2} BC \cdot AD$ .

$$BC = \sqrt{26}$$

Расстояние  $AD$  можно найти как расстояние от точки  $A(x_0; y_0)$  до прямой

$$BC: Ax + By + C = 0 \text{ по формуле: } d(A, BC) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$A(1; 1), BC: 5x - y + 11 = 0 \quad d(A, BC) = \frac{|5 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 11|}{\sqrt{5^2 + 1^2}} = \frac{15}{\sqrt{26}}$$

$$S = \frac{1}{2} AD \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{26} \cdot \frac{15}{\sqrt{26}} = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ ед.}^2$$

## ДОМАШНЯЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

2 семестр

### Выбор вариантов

Начальные буквы фамилий студентов	Вариант
А, Б	1
В, Г	2
Д, Е, Ж	3
З, И, К,	4
Л, М	5
Н, О, П	6
Р, С	7
Т, У, Ф, Х	8
Ц, Ч, Ш, Щ	9
Э, Ю, Я	10

По каждому заданию в контрольных работах имеются методические указания, в которых подробно разобраны подобные задачи.

#### ***Тема 1. Элементы комбинаторики. События и их вероятности, классический и геометрический способы подсчета вероятностей***

*Вариант 1.* Среди 40 деталей 3 нестандартные. Наудачу взяты 2 детали. Найти вероятность того, что они нестандартные.

*Вариант 2.* В урне 3 белых и 7 чёрных шаров. Какова вероятность того, что вынутые наугад два шара окажутся белыми?

*Вариант 3.* В ящике 100 деталей, из них 10 бракованных. Наудачу извлечены четыре детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей: а) нет бракованных; б) нет годных.

*Вариант 4.* Устройство состоит из пяти элементов, из которых два

изношены. При включении устройства включаются случайным образом два элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.

*Вариант 5.* Товаровед получил 50 одинаковых изделий, среди них 5 бракованных. Наудачу для контроля взяты путём случайного выбора три изделия. Найти вероятность того, что среди них окажется ровно одно бракованное.

*Вариант 6.* Из партии, в которой 30 деталей без дефекта и 5 с дефектом, берут наугад три детали. Какова вероятность того, что среди них ровно две детали без дефекта?

*Вариант 7.* Среди 17 студентов группы, из которых 8 – девушки, разыгрывается 7 билетов в театр. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся 4 девушки и 3 юношей?

*Вариант 8.* На складе имеется 15 телевизоров, причем 10 из них изготовлены отечественным производителем. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наудачу телевизоров окажутся три отечественных телевизора.

*Вариант 9.* Найти вероятность того, что точка брошенная в круг радиуса 1, окажется вне вписанного в этот круг квадрата.

*Вариант 10.* Внутри круга радиуса  $R$  наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг правильного треугольника.

## ***Тема 2. Операции над событиями.***

### ***Правила сложения и умножения вероятностей***

*Вариант 1.* Заводом послана автомашина за различными материалами на 4 базы. Вероятность наличия нужного материала на первой базе равна 0,9; на второй – 0,95; на третьей – 0,8; на четвёртой – 0,6. Найти

вероятность, того что только на одной базе не окажется нужного материала.

*Вариант 2.* Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для – второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

*Вариант 3.* Производится три выстрела по одной и той же мишени. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,4; при втором – 0,5 и при третьем – 0,7. Найти вероятности следующих событий:  $A = \{ \text{ровно одно попадание} \}$ ;  $B = \{ \text{хотя бы одно попадание} \}$ ;  $C = \{ \text{хотя бы два попадания} \}$ .

*Вариант 4.* В телеателье имеется три телевизора. Вероятности неисправности каждого из них соответственно равны 0,1; 0,2; 0,1. Какова вероятность того, что среди этих телевизоров исправными окажутся: 1) ровно два; 2) хотя бы один.

*Вариант 5.* Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,8. Найти вероятность того, что из трёх проверенных изделий только два изделия высшего сорта.

*Вариант 6.* В сессию студент должен сдать 4 экзамена. Вероятность не выдержать первый – 0,1, для последующих экзаменов – 0,2; 0,15; 0,25 соответственно. Какова вероятность того, что студент сдаст хотя бы один экзамен?

*Вариант 7.* Устройство состоит из трёх элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что безотказно будут работать: а) только один элемент; б) только два элемента; в) все три элемента.

*Вариант 8.* Брошены три игральные кости. Найти вероятность того, что на каждой из выпавших граней появится пять очков.

*Вариант 9.* Первый магазин может выполнить план с вероятностью 0,9; второй – с вероятностью 0,8, а третий – с вероятностью 0,85. Найти вероятность того, что план выполнят не менее двух магазинов.

*Вариант 10.* Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна 0,8, а вторым стрелком – 0,6. Найти вероятность того, что цель будет поражена только одним стрелком.

### ***Тема 3. Формула полной вероятности. Формулы Байеса***

*Вариант 1.* Сборщик получил 6 коробок деталей, изготовленных заводом №1, и 4 коробки деталей, изготовленных заводом №2. Вероятность того, что деталь завода №1 стандартна, равна 0,8, а завода №2 – 0,9. Сборщик случайно извлёк деталь из наудачу взятой коробки. Деталь оказалась стандартной. Определить вероятность того, что она изготовлена на заводе №1.

*Вариант 2.* На сборку попадают детали с 3 автоматов. Известно, что первый автомат дает 3% брака, второй – 2% и третий – 4%. Найти вероятность того, что на сборку попадает бракованная деталь, если с первого автомата поступает 100, со второго – 200, с третьего – 250 деталей.

*Вариант 3.* Турист, заблудившийся в лесу, вышел на полянку, от которой в разные стороны ведут 5 дорог. Если турист пойдет по первой дороге, то вероятность его выхода из леса в течение часа составляет 0,6; если по второй – 0,3; если по третьей – 0,2; если по четвертой – 0,1; если по пятой – 0,1. Какова вероятность того, что турист пошёл по первой дороге, если через час он вышел из леса?

*Вариант 4.* В сборочный цех завода поступают детали с трех автоматов. Вероятность поступления бракованной продукции с первого автомата

составляет 0,03, для второго и третьего автоматов эти вероятности равны соответственно 0,01 и 0,02. Определить вероятность попадания на сборку небракованной детали, если с каждого автомата в цех поступило соответственно 500, 200 и 300 деталей.

*Вариант 5.* Известно, что в партии из 600 электрических лампочек 200 изготовлены на первом заводе, 250 на втором, 150 – на третьем. Вероятности того, что лампочка окажется стандартной при изготовлении на первом, втором, третьем заводах соответственно равны 0,97, 0,91 и 0,93. Какова вероятность того, что взятая наудачу лампочка окажется стандартной, изготовлена вторым заводом?

*Вариант 6.* При проверке качества зёрен пшеницы было установлено, что зёрна могут быть разбиты на 4 группы. К зёрнам первой группы принадлежит 96 %, второй – 2%, третьей и четвёртой – по 1% всех зёрен. Вероятности того, что зёрна дадут колос, содержащий не менее 50 зёрен, для семян указанных групп равны соответственно 0,5; 0,2; 0,18 и 0,2. Найти вероятность того, что из взятого наудачу зерна вырастет колос, содержащий не менее 50 зёрен.

*Вариант 7.* В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму для лыжника равна 0,9; для велосипедиста – 0,8; для бегуна – 0,75. Вызванный наудачу спортсмен норму выполнил. Найти вероятность того, что это бегун.

*Вариант 8.* Страховая компания разделяет водителей по трём классам: № 1 (мало рискует), № 2 (рискует средне), № 3 (рискует сильно). Компания предполагает, что из всех водителей, застраховавших автомобили, 30% принадлежат классу № 1, 50% - к классу № 2 и 20% - к классу № 3. Вероятность того, что в течение года водитель класса № 1 попадает в одну аварию, равна 0,01, для водителя класса № 2 эта вероятность равна 0,02, а для класса № 3 – 0,08. Найти вероятность того, что водитель, застраховавший свою машину, попадает в аварию в течение года.

*Вариант 9.* Прибор может собираться из высококачественных деталей и из деталей обычного качества. Известно, что около 40% приборов собирается из высококачественных деталей, при этом вероятность его безотказной работы равна 0,95. Если прибор собран из деталей обычного качества, эта вероятность равна 0,7. Прибор испытывался и работал безотказно. Найти вероятность того, что он собран из высококачественных деталей.

*Вариант 10.* Пассажир может обратиться за получением билета в одну кассу из трёх. Вероятности обращения в каждую из касс зависят от их месторасположения и равны соответственно 0,2; 0,3; 0,5. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира интересующие его билеты будут распроданы, равна для первой кассы 0,3, для второй – 0,4, для третьей – 0,5. Пассажир направился в одну из касс и приобрёл нужный билет. Найти вероятность того, что это была первая касса.

***Тема 4. Повторение независимых испытаний. Наивероятнейшее число успехов. Формулы Бернулли, Лапласа, Пуассона.***

*Вариант 1.* Университетом для студенческих общежитий приобретено 5 телевизоров. Для каждого из них вероятность выхода из строя в течение гарантийного рока равна 0,1. Определить вероятность того, что в течение гарантийного срока выйдут из строя: а) ровно один; б) не менее двух; в) не более трех телевизоров.

*Вариант 2.* В результате систематически проводимого контроля качества изготавливаемых предприятием деталей установлено, что брак составляет в среднем 5%. Сколько изготовленных деталей нужно взять, чтобы наиболее вероятное число годных среди них было равно 60 штук?

*Вариант 3.* Вероятность того, что какой-нибудь абонент позвонит на

коммутатор в течение часа, равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 300 абонентов. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят ровно 4 абонента?

*Вариант 4.* Вероятность того, что саженец ели прижился и будет расти, равна 0,8. Посажено 400 саженцев. Какова вероятность того, что нормально вырастет: а) ровно 250 деревьев; б) не менее 250 деревьев.

*Вариант 5.* Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,001. Найти вероятность попадания в цель двух и более пуль, если число выстрелов равно 5000.

*Вариант 6.* Вероятность того, что изготовленная рабочим деталь отличного качества, равна 0,8. Найти вероятность того, что среди 100 деталей окажется отличного качества: а) ровно 80 деталей; б) от 70 до 85 деталей; в) не менее 85 деталей.

*Вариант 7.* В магазине 5 холодильников. Вероятность выхода каждого холодильника из строя в течение года равна 0,2. Найти вероятность того, что в течение года ремонта потребует: а) ровно 4 холодильника; б) не менее 2 холодильников; в) не более 1 холодильника.

*Вариант 8.* Известно, что в большой партии радиоламп 90% стандартных. Найти вероятности того, что из 300 отобранных радиоламп стандартных окажутся: а) ровно 270; б) от 260 до 275; в) не менее 275.

*Вариант 9.* Чему равна вероятность наступления события в каждом из 39 независимых испытаний, если наивероятнейшее число наступлений события в этих испытаниях равно 25?

*Вариант 10.* Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятности того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена: а) ровно 75 раз; б) от 75 до 80 раз; в) не менее 80 раз.

## **МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ**

### ***Тема 1. Элементы комбинаторики. События и их вероятности,***

## *классический и геометрический способы подсчета вероятностей*

1. При *классическом способе подсчета* вероятность события  $A$  вычисляется по формуле

$$P(A) = \frac{m}{n}, \text{ где}$$

все элементарные исходы равновозможны, т.е. ни один из них не является более возможным, чем другой;

$n$  – общее число всех возможных элементарных исходов испытания;

$m$  – число элементарных исходов испытания, благоприятствующих появлению события  $A$ .

2. Для подсчета  $m$  и  $n$ , а также для других целей, часто приходится использовать *комбинаторные понятия и формулы*.

Пусть имеется  $n$  различных объектов (элементов).

а) Расположение их всех в каком-нибудь определенном порядке называется *перестановкой из  $n$  элементов*.

Перестановки, состоящие из одних и тех же элементов, отличаются только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок:

$$P_n = n!$$

где  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \cdot n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ;  $1! = 1$ ,  $0! = 1$ .

б) Расположение некоторых  $m$  ( $m \leq n$ ) из них в определенном порядке называется *размещением  $m$  элементов из  $n$  элементов*. Размещения отличаются *и составом и порядком элементов*. Число всех возможных размещений

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{P_n}{P_{n-m}} = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$$

Понятно, что при  $m=n$  размещение является перестановкой.

в) Если не принимать во внимание порядок элементов в размещении, а учитывать только его состав, то получится *сочетание  $m$  элементов из  $n$* . Сочетания отличаются *только составом элементов*.

Число всех возможных сочетаний

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{A_n^m}{P_m}.$$

3. *Геометрические вероятности* – вероятности попадания точки в область (отрезок, часть плоскости и т.д.) – применяются, когда элементарные исходы эксперимента могут быть интерпретированы как точки отрезка, фигуры или тела.

Пусть отрезок  $l$  составляет часть отрезка  $L$ . Если предположить, что вероятность попадания точки на отрезок  $l$  пропорциональна длине этого отрезка, то вероятность попадания точки на отрезок  $l$  определяется равенством

$$P = \text{Длина } l / \text{Длина } L.$$

Аналогично определяется вероятность попадания точки в плоскую фигуру  $g$ , составляющую часть плоской фигуры  $G$

$$P = \text{Площадь } g / \text{Площадь } G$$

и вероятность попадания точки в пространственную фигуру  $u$ , которая составляет часть фигуры  $V$

$$P = \text{Объём } u / \text{Объём } V.$$

**Пример 1.** (Варианты 1, 2, 3, 4)

В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

*Решение:*

Событие  $A = \{\text{извлечены три окрашенных детали}\}$ . Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов,

которыми можно извлечь 3 детали из 15, т.е.

$$n = C_{10}^3 = \frac{15!}{3!(15-3)!} = \frac{15!}{3!12!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 13 \cdot 7 \cdot 5$$

Число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию, равно числу способов, которыми можно извлечь 3 детали из 10 окрашенных, т. е.

$$m = C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 3 \cdot 10;$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 10}{5 \cdot 7 \cdot 13} = \frac{24}{91} \approx 0,26$$

**Пример 2.** (Варианты 5, 6, 7, 8)

В цехе работают шесть мужчин и четыре женщины. Наудачу отобраны семь человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины и четыре мужчины.

*Решение:*

Событие  $A = \{\text{среди отобранных ровно три женщины}\}$ . Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно выбрать 7 человек из всех работников, цеха, т.е. из 10 человек.

$$n = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{10!}{7!3!} = 3 \cdot 4 \cdot 10$$

Подсчитаем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию (среди 7 отобранных ровно 3 женщины): трёх женщин можно выбрать из четырёх  $C_4^3$  способами; при этом остальные 4 человека должны быть мужчинами. Выбрать же четырех мужчин из шести мужчин можно  $C_6^4$  способами.

$$m = C_4^3 \cdot C_6^4 = \frac{4!6!}{3!(4-3)!4!(6-4)!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 2 \cdot 5 \cdot 6$$

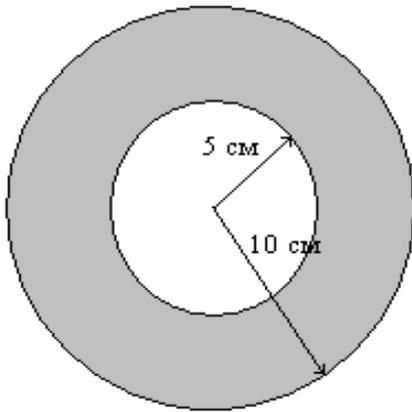
Следовательно,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_4^3 \cdot C_6^4}{C_{10}^7} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 6}{3 \cdot 4 \cdot 10} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

**Пример 3.** (Варианты 9, 10)

На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых 5 и 10 см. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадает в кольцо, образованное построенными окружностями.

*Решение:*



Площадь кольца (фигуры  $g$ )

$$S_g = \pi(10^2 - 5^2) = 75\pi$$

Площадь большого круга

$$S_G = \pi \cdot 10^2 = 100\pi$$

Искомая вероятность

$$P = \frac{S_g}{S_G} = \frac{75\pi}{100\pi} = 0,75$$

**Тема 2. Операции над событиями.**

**Правила сложения и умножения вероятностей**

События называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Два события называются *совместными*, если появление одного из них не исключает появления другого события в том же испытании.

Событие  $B$  называется *независимым* от события  $A$ , если появление события  $A$  не изменяет вероятности события  $B$ , т.е.

$$P_A(B) = P(B), \text{ где}$$

$P_A(B)$  - условная вероятность наступления события  $B$ , если событие  $A$

уже наступило.

### *1. Сложение вероятностей.*

*Правило сложения вероятностей совместных событий*

Для любых событий  $A$  и  $B$

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB), \text{ где}$$

$P(A+B)$  – вероятность появления хотя бы одного из двух событий,

$P(AB)$  – вероятность совместного появления двух событий.

*Правило сложения вероятностей несовместных событий*

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

### *2. Умножение вероятностей*

*Правило умножения вероятностей зависимых событий*

Для любых событий  $A$  и  $B$

$$P(AB)=P(A) \cdot P_A(B)=P(B) \cdot P_B(A), \text{ где}$$

$P_A(B)$  - условная вероятность наступления события  $B$ , если событие  $A$  уже наступило,

$P_B(A)$  - условная вероятность наступления события  $A$ , если событие  $B$  уже наступило.

*Правило умножения вероятностей независимых событий*

$$P(AB)=P(A) \cdot P(B).$$

### **Пример 4.** (Все варианты)

Экзаменационный билет содержит 3 вопроса. Вероятность того, что студент ответит на первый вопрос, равна 0,9; на второй – 0,7; на третий – 0,8. Найти вероятность того, что студент ответит:

- а) только на один вопрос (варианты 1,2,3,7,10)
- б) на все вопросы (варианты 7,8)
- в) хотя бы на один вопрос (варианты 3,4,6)
- г) по крайней мере на два вопроса (варианты 3,9)
- д) на два вопроса (варианты 4,5)

Решение:

Пусть событие  $A_1 = \{\text{студент ответил на первый вопрос}\}$ ,

$\bar{A}_1 = \{\text{студент не ответил на первый вопрос}\}$ ,

$A_2 = \{\text{студент ответил на второй вопрос}\}$ ,

$\bar{A}_2 = \{\text{студент не ответил на второй вопрос}\}$ ,

$A_3 = \{\text{студент ответил на третий вопрос}\}$ ,

$\bar{A}_3 = \{\text{студент не ответил на третий вопрос}\}$ .

События  $A_1$  и  $\bar{A}_1$  – противоположные, поэтому  $P(A_1) + P(\bar{A}_1) = 1$ ,  
 $P(\bar{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0,9 = 0,1$ . Аналогично  $P(\bar{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - 0,7 = 0,3$  и  
 $P(\bar{A}_3) = 1 - P(A_3) = 1 - 0,8 = 0,2$ .

**а)** Событие  $A = \{\text{студент ответил только на один вопрос}\}$ .

Появление события  $A$  означает, что наступило одно из трёх несовместных событий: либо  $A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$ , либо  $\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3$ , либо  $\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$ . По правилу сложения вероятностей

$$P(A) = P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3).$$
 События  $A_1, A_2, A_3$  -

независимые, следовательно, независимы и события  $A_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$ . По правилу умножения вероятностей для независимых событий

$$P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) = 0,9 \cdot 0,3 \cdot 0,2 = 0,054.$$

Аналогично

$$P(\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3) = P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\bar{A}_3) = 0,1 \cdot 0,7 \cdot 0,2 = 0,014,$$

$$P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(A_3) = 0,1 \cdot 0,3 \cdot 0,8 = 0,024.$$

Тогда  $P(A) = 0,054 + 0,014 + 0,024 = 0,092$ .

**б)** Событие  $B = \{\text{студент ответил на все вопросы}\}$ . Наступление события

$B$  означает, что одновременно появились независимые события  $A_1, A_2, A_3$ ,

т. е.  $P(B) = P(A_1 A_2 A_3)$ . По правилу умножения вероятностей для независимых событий

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,9 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,504, \quad P(B) = 0,504.$$

в) Событие  $B = \{ \text{студент ответил хотя бы на один вопрос} \}$ . Это означает, что был дан ответ на любой один вопрос, или на любые два вопроса, или на все три вопроса. Событие  $\bar{B} = \{ \text{студент не ответил ни на один вопрос} \}$ . События  $B$  и  $\bar{B}$  противоположны, поэтому  $P(B) = 1 - P(\bar{B})$ .

Событие  $\bar{B}$  означает, что одновременно появились независимые события  $\bar{A}_1, \bar{A}_2$  и  $\bar{A}_3$ , т. е.  $P(\bar{B}) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3)$ . По правилу умножения вероятностей

для независимых событий  $P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) = 0,1 \cdot 0,3 \cdot 0,2 = 0,006$ .

Итак,  $P(B) = 1 - 0,006 = 0,994$ .

г) Событие  $\Gamma = \{ \text{студент ответил по крайней мере на два вопроса} \}$ . Это означает, что дан ответ на любые два вопроса или на все три вопроса. Появление события  $\Gamma$  означает, что наступило одно из четырёх несовместных событий: либо  $A_1 A_2 \bar{A}_3$ , либо  $A_1 \bar{A}_2 A_3$ , либо  $\bar{A}_1 A_2 A_3$ , либо  $A_1 A_2 A_3$ . По правилу сложения вероятностей несовместных событий

$$P(\Gamma) = P(A_1 A_2 \bar{A}_3) + P(A_1 \bar{A}_2 A_3) + P(\bar{A}_1 A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_3).$$

События  $A_1, A_2, A_3$  - независимые, следовательно, независимы события  $A_1, A_2$  и  $\bar{A}_3$ . По правилу умножения вероятностей независимых событий

$$P(A_1 A_2 \bar{A}_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\bar{A}_3) = 0,9 \cdot 0,7 \cdot 0,2 = 0,126.$$

Аналогично получаем  $P(A_1 \bar{A}_2 A_3) = P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(A_3) = 0,9 \cdot 0,3 \cdot 0,8 = 0,216$ ,

$$P(\bar{A}_1 A_2 A_3) = P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,1 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,056,$$

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,9 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,504$$

. Окончательно имеем  $P(\Gamma) = 0,126 + 0,216 + 0,056 + 0,504 = 0,902$ .

д) Событие  $D = \{ \text{студент ответил на два вопроса} \}$ . Появление события  $D$  означает, что наступило одно из трёх несовместных событий: либо  $A_1 A_2 \bar{A}_3$ , либо  $A_1 \bar{A}_2 A_3$ , либо  $\bar{A}_1 A_2 A_3$ . Далее, используя решение задачи г), имеем  $P(D) = 0,126 + 0,216 + 0,056 = 0,398$ .

### **Тема 3. Формула полной вероятности. Формулы Байеса**

#### **1. Формула полной вероятности**

Пусть событие  $A$  может наступить лишь при появлении одного из множества попарно несовместных событий (гипотез)  $H_1, H_2, \dots, H_n$ . Тогда вероятность события  $A$  вычисляется по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) P_{H_i}(A)$$

События  $H_1, H_2, \dots, H_n$  называются гипотезами по отношению к событию  $A$ .

#### **2. Формулы Байеса**

Если событие  $A$  уже произошло, то вероятности гипотез (априорные вероятности) могут быть переоценены (апостериорные вероятности) по формулам Байеса

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) P_{H_i}(A)} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

#### **Пример 5.** (Варианты 2, 4, 6, 8)

В ателье имеются 5 плееров, выпущенных заводом В, 10 плееров – заводом С, 15 плееров – заводом D. Вероятность того, что плееры, выпущенные заводами В, С, D, выдержат гарантийный срок службы, соответственно равны 0,8, 0,85 и 0,9. Найти вероятность того, что взятый наудачу плеер выдержит гарантийный срок службы.

*Решение:*

Событие  $A = \{\text{плейер выдержит гарантийный срок службы}\}$ ,

Гипотеза  $H_1 = \{\text{плейер выпущен заводом В}\}$ ,

Гипотеза  $H_2 = \{\text{плейер выпущен заводом С}\}$ ,

Гипотеза  $H_3 = \{\text{плейер выпущен заводом D}\}$ .

$$P(H_1) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}; \quad P(H_2) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}; \quad P(H_3) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2};$$

$$P_{H_1}(A) = 0,8; \quad P_{H_2}(A) = 0,85; \quad P_{H_3}(A) = 0,9.$$

По формуле полной вероятности  $P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) +$

$$+ P(H_3) \cdot P_{H_3}(A) = \frac{1}{6} \cdot 0,8 + \frac{1}{3} \cdot 0,85 + \frac{1}{2} \cdot 0,9 \approx 0,867$$

**Пример 6.** (Варианты 1, 3, 5, 7, 9, 10)

Литьё в болванках поступает из двух заготовительных цехов: 70% из первого цеха, 30% из второго цеха. Литьё первого цеха имеет 10% брака, второго – 20% брака. Взятая наудачу болванка оказалась без дефекта. Какова вероятность её изготовления первым цехом?

*Решение:*

Событие  $A = \{\text{болванка без дефекта}\}$ .

Гипотеза  $H_1$  – болванка изготовлена первым цехом,

Гипотеза  $H_2$  – болванка изготовлена вторым цехом,

Литьё первого цеха имеет 10% брака, следовательно, 90% болванок, изготовленных первым цехом, не имеют дефекта и  $P_{H_1}(A) = 0,9$ . Литьё второго цеха имеет 20% брака, следовательно, 80% болванок, изготовленных вторым цехом, не имеют дефекта и  $P_{H_2}(A) = 0,8$ .

Необходимо найти  $P_A(H_1)$ .

По формуле Байеса

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(A)} = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)} =$$

$$= \frac{0,7 \cdot 0,9}{0,7 \cdot 0,9 + 0,3 \cdot 0,8} = \frac{0,63}{0,63 + 0,24} = \frac{0,63}{0,87} \approx 0,724$$

#### **Тема 4. Повторение независимых испытаний.**

##### 1. Формула Бернулли

Вероятность того, что в серии из  $n$  независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события  $A$  равна  $p$  ( $0 < p < 1$ ), это событие наступит ровно  $k$  раз (безразлично в какой последовательности), равна

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  – число сочетаний из  $n$  по  $k$  (см. выше),  $q = 1-p$  – вероятность противоположного события  $\bar{A}$ .

В различных задачах нас могут интересовать следующие вероятности:

– вероятность того, что в  $n$  испытаниях событие  $A$  наступит менее  $m$  раз

$$P_n(k < m) = P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(m-1);$$

– вероятность того, что в  $n$  испытаниях событие  $A$  наступит более  $m$  раз

$$P_n(k > m) = P_n(m+1) + P_n(m+2) + \dots + P_n(n);$$

– вероятность того, что в  $n$  испытаниях событие  $A$  наступит не менее  $m$  раз

$$P_n(k \geq m) = P_n(m) + P_n(m+1) + \dots + P_n(n);$$

– вероятность того, что в  $n$  испытаниях событие  $A$  наступит не более  $m$  раз

$$P_n(k \leq m) = P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(m).$$

– вероятность того, что в  $n$  испытаниях событие  $A$  наступит не менее  $k_1$  и не более  $k_2$  раз

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = P_n(k_1) + \dots + P_n(k_2).$$

Все эти вероятности могут быть вычислены по формуле Бернулли, однако, на практике ввиду вычислительных сложностей это возможно лишь при небольших  $n$  и поэтому используются приближенные формулы.

## 2. Приближенные формулы Муавра- Лапласа

### 2.1. Локальная теорема Лапласа

Если число испытаний  $n$  велико, а вероятность  $p$  не очень мала, то

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

где 
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Значения функции  $\varphi(x)$  приведены в приложении (таблица 1), при  $x > 5$  полагают  $\varphi(x) \approx 0$ , для отрицательных значений  $x$  пользуются тем, что функция  $\varphi(x)$  четная, и, следовательно,  $\varphi(-x) = \varphi(x)$ .

### 2.2. Интегральная теорема Лапласа

Вероятность того, что событие  $A$  появится в  $n$  испытаниях не менее  $k_1$  и не более  $k_2$  раз находится по формуле

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где 
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-(z^2/2)} dz = \int_0^x \varphi(z) dz, \quad x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Значения функции Лапласа  $\Phi(x)$  приведены в приложении (таблица 2), при  $x > 5$  полагают  $\Phi(x) \approx 0,5$ , для отрицательных значений  $x$  пользуются тем, что функция  $\Phi(x)$  нечетная, и, следовательно,  $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ .

## 3. Приближенная формула Пуассона

Если число испытаний  $n$  велико, а вероятность  $p$  появления события в каждом испытании очень мала, то

$$P_n(k) \approx \frac{(np)^k e^{-np}}{k!}.$$

Обозначив  $\lambda = np$  – среднее число успехов в серии испытаний, получим

$$P_n(k) \approx p(k; \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Значение  $p(k; \lambda)$  по заданным  $k$  и  $\lambda$  можно определить по приложению (таблица 3).

#### 4. Наивероятнейшее число успехов

Число  $k_0$  называется *наивероятнейшим*, если вероятность  $P_n(k_0)$  того, что событие  $A$  наступит в  $n$  испытаниях ровно  $k_0$  раз, является наибольшей из всех вероятностей  $P_n(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ .

Наивероятнейшее число  $k_0$  определяется из двойного неравенства

$$np - q \leq k_0 \leq np + p,$$

причем:

а) если число  $np - q$  – нецелое, то существует единственное  $k_0$ ;

б) если число  $np - q$  – целое, то наивероятнейших числа два, а именно:  $k'_0 = np - q$  и  $k''_0 = np + p = k'_0 + 1$ ;

в) если  $np$  – целое, то  $k_0 = np$ .

#### **Пример 7.** (Варианты 1, 7)

В семье пять детей. Найти вероятность того, что среди этих детей: а) ровно два мальчика; б) не более двух мальчиков; в) более двух мальчиков; г) не менее двух и не более трех мальчиков. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.

*Решение:*

Число испытаний  $n=5$  невелико, поэтому вероятности можно вычислить непосредственно по формуле Бернулли.

а) Вероятность того, что среди пяти детей ровно два мальчика, равна

$$P_5(2) = C_5^2 p^2 q^{5-2}, \text{ где } C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10, \quad p=0,51, \quad q=1-p=0,49.$$

$$P_5(2) = 10 \cdot 0,51^2 \cdot 0,49^3 \approx 0,31.$$

б) Вероятность того, что среди пяти детей не более двух мальчиков, равна

$$P_5(0 \leq k \leq 2) = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2)$$

$$P_5(0) = C_5^0 p^0 q^5 = \frac{5!}{0!(5-0)!} \cdot q^5 = q^5 = 0,49^5 \approx 0,028$$

$$P_5(1) = C_5^1 p^1 q^4 = \frac{5!}{1!(5-1)!} \cdot p^1 \cdot q^4 = 5 \cdot 0,51 \cdot 0,49^4 \approx 0,147$$

$$P_5(2) \approx 0,31 \text{ (см. а)}.$$

$$P_5(0 \leq k \leq 2) = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) = 0,028 + 0,147 + 0,31 \approx 0,485$$

в) Событие {среди пяти детей более двух мальчиков} противоположно событию {среди пяти детей не более двух мальчиков}, поэтому его вероятность равна  $P_5(3 \leq k \leq 5) = 1 - P_5(0 \leq k \leq 2) = 1 - 0,485 = 0,515$ .

г) Вероятность того, что среди пяти детей не менее двух и не более трёх мальчиков, равна  $P_5(2 \leq k \leq 3) = P_5(2) + P_5(3)$ ,  $P_5(2) = 0,31$  (см. а)).

$$P_5(3) = C_5^3 p^3 q^{5-3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} \cdot 0,51^3 \cdot 0,49^2 \approx 0,31; \quad P_5(2) + P_5(3) = 0,62.$$

**Пример 8.** (Варианты 2, 9)

Сколько надо произвести независимых испытаний с вероятностью появления события в каждом испытании, равной 0,4, чтобы наивероятнейшее число появлений события в этих испытаниях было равно 25?

*Решение:*

По условию  $k_0 = 25$ ;  $p = 0,4$ ;  $q = 0,6$ . Воспользуемся двойным неравенством  $np - q \leq k_0 \leq np + p$ . Подставляя данные задачи, получим систему неравенств для определения неизвестного числа  $n$ :  $0,4n - 0,6 \leq 25$ ,  $0,4n + 0,4 \geq 25$ . Из первого неравенства системы найдем  $n \leq 25,6/0,4 = 64$ . Из второго неравенства системы имеем  $n \geq 24,6/0,4 = 61,5$ . Итак, искомое число испытаний должно быть  $62,63$  или 64.

**Пример 9.** (Варианты 4, 6, 8, 10)

Вероятность появления события  $A$  в каждом из 2400 независимых испытаний постоянна и равна 0,6. Найти вероятность того, что событие  $A$  наступит: а) равно 1400 раз; б) от 1400 до 1800 раз; в) не менее 1400 раз.

*Решение:*

Число испытаний  $n=2400$  велико; вероятность  $p=0,6$  появления события  $A$  немала;  $q=1-p=0,4$ ;  $npq=2400 \cdot 0,6 \cdot 0,4=1440 \cdot 0,4 = 576 \geq 20$ , поэтому воспользуемся локальной и интегральной формулами Лапласа.

а) Имеем:  $n=2400$ ,  $p=0,6$ ,  $q=0,4$ ,  $k=1400$ ,  $np=1440$ ,  $npq=576$ ,  
 $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1400 - 1440}{\sqrt{576}} = \frac{-40}{24} \approx -1,67$ .  
 Функция  $\varphi(x)$  четная, поэтому  $\varphi(-1,67) = \varphi(1,67)$ . По таблице 1 приложения  $\varphi(1,67) \approx 0,09893$ . По

локальной приближенной формуле Лапласа  $P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$  получим

$$P_{2400}(1400) \approx \frac{1}{24} \varphi(1,67) \approx \frac{0,09893}{24} \approx 0,0041$$

б) Имеем:  $n=2400$ ,  $p=0,6$ ,  $q=0,4$ ,  $k_1=1400$ ,  $k_2=1800$ ,  $np=1440$ ,  $\sqrt{npq}=24$ ,  
 $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \approx -1,67$ ,  $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1800 - 1440}{24} = \frac{360}{24} = 15$ .  
 Функция  $\Phi(x)$

нечетная, поэтому  $\Phi(-1,67) = -\Phi(1,67)$ . По таблице 2 приложения находим  $\Phi(1,67) \approx 0,45254$ ,  $\Phi(15) \approx 0,5$  (т. к. при  $x > 5$  полагают  $\Phi(x) \approx 0,5$ ).

По интегральной приближенной формуле Лапласа  $P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$  имеем  $P_{2400}(1400 \leq k \leq 1800) \approx \Phi(15) - \Phi(-1,67) = \Phi(15) + \Phi(1,67) \approx 0,5 + 0,45254 = 0,95254$ .

в) Требование, чтобы событие появлялось не менее 1400 раз, означает, что максимально допустимое число появлений события  $A$  равно числу испытаний, т.е.  $k_2=2400$ . В остальном решение задачи аналогично пункту б).

**Пример 10.** (Варианты 3, 5)

Тираж книги 100 000 экземпляров. Вероятность того, что она сброшюрована неправильно, равна 0,00001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно пять бракованных книг.

*Решение:*

События, состоящие в том, что книги бракованные, независимы. По условию число испытаний  $n=100\,000$  весьма велико, а вероятность  $p=0,00001$  очень мала,  $\lambda = np = 1 \in (0,1;10)$ . Следовательно, можно

использовать приближенную формулу Пуассона  $P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ . По таблице 3 приложения для известных  $\lambda=1$  и  $k=5$  находим  $P_{100\,000}(5) \approx 0,00307$ .

## Приложение

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

**Таблица 1.** Значения локальной функции Лапласа

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3 989	398 9	398 9	398 8	399 86	398 4	398 2	398 0	397 7	397 3
0,1	0,3 970	396 5	396 1	395 6	395 1	394 5	393 9	393 2	392 5	391 8
0,2	0,3 910	390 2	389 4	388 5	387 6	386 7	385 7	384 7	383 6	382 5
0,3	0,3 814	380 2	379 0	377 8	376 5	375 2	373 9	372 6	371 2	369 7
0,4	0,3 683	366 8	365 3	363 7	362 1	360 5	358 9	357 2	355 5	353 8
0,5	0,3 521	350 3	348 5	346 7	344 8	342 9	341 0	339 1	337 2	335 2
0,6	0,3 332	331 2	329 2	327 1	325 1	323 0	320 9	318 7	316 6	314 4
0,7	0,3 123	310 1	307 9	305 6	303 4	301 1	298 9	296 6	294 3	292 0
0,8	0,2 897	287 4	285 0	282 7	280 3	278 0	275 6	273 2	270 9	268 5
0,9	0,2 661	263 7	261 3	258 9	256 5	254 1	251 6	249 2	246 8	244 4
1,0	0,2 420	239 6	237 1	234 7	232 3	229 9	227 5	225 1	222 7	220 3
1,1	0,2 179	215 5	213 1	210 7	208 3	205 9	203 6	201 2	198 9	196 5
1,2	0,1 942	191 9	189 5	187 2	184 9	182 6	180 4	178 1	175 8	173 6
1,3	0,1 714	169 1	166 9	164 7	162 6	160 4	158 2	156 1	153 9	151 8
1,4	0,1 497	147 6	145 6	143 5	141 5	139 4	137 4	135 4	133 4	131 5
1,5	0,1 295	127 6	125 7	123 8	121 9	120 0	118 2	116 3	114 5	112 7
1,6	0,1 109	109 2	107 4	105 7	104 0	102 3	100 6	098 9	097 3	095 7
1,7	0,0 940	092 5	090 9	089 3	087 8	086 3	084 8	083 3	081 8	080 4
1,8	0,0 790	077 5	076 1	074 8	073 4	072 1	070 7	069 4	068 1	066 9
1,9	0,0 656	064 4	063 2	062 0	060 8	059 6	058 4	057 3	056 2	055 1
2,0	0,0 540	052 9	051 9	050 8	049 8	048 8	047 8	046 8	045 9	044 9

2,1	0,0 440	1 043	2 042	3 041	4 040	6 039	7 038	9 037	1 037	3 036
2,2	0,0 355	7 034	9 033	2 033	5 032	7 031	0 031	3 030	7 029	0 029
2,3	0,0 283	7 027	0 027	4 026	8 025	2 025	6 024	1 024	5 023	9 022
2,4	0,0 224	9 021	3 021	8 020	3 020	8 019	4 019	9 018	4 018	0 018
2,5	0,0 175	1 017	7 016	3 016	8 015	4 015	1 015	7 014	3 014	9 013
2,6	0,0 136	2 013	9 012	6 012	2 012	9 011	6 011	3 011	0 011	7 010
2,7	0,0 104	1 010	9 009	6 009	3 009	1 009	8 008	6 008	4 008	1 008
2,8	0,0 079	7 007	5 007	3 007	1 007	9 006	7 006	5 006	3 006	1 006
2,9	0,0 060	8 005	6 005	5 005	3 005	1 005	0 005	8 004	7 004	6 004
3,0	0,0 044	3 004	2 004	0 004	9 003	8 003	7 003	6 003	5 003	4 003
3,1	0,0 033	2 003	1 003	0 003	9 002	8 002	7 002	6 002	5 002	5 002
3,2	0,0 024	3 002	2 002	2 002	1 002	0 002	0 002	9 001	8 001	8 001
3,3	0,0 017	7 001	6 001	6 001	5 001	5 001	4 001	4 001	3 001	3 001
3,4	0,0 012	2 001	2 001	1 001	1 001	0 001	0 001	0 001	9 000	9 000
3,5	0,0 009	8 000	8 000	8 000	8 000	7 000	7 000	7 000	7 000	6 000
3,6	0,0 006	6 000	6 000	5 000	5 000	5 000	5 000	5 000	5 000	4 000
3,7	0,0 004	4 000	4 000	4 000	4 000	4 000	3 000	3 000	3 000	3 000
3,8	0,0 003	3 000	3 000	3 000	3 000	2 000	2 000	2 000	2 000	2 000
3,9	0,0 002	2 000	2 000	2 000	2 000	2 000	2 000	2 000	1 000	1 000
4,0	0,000 1338		0000 589		0000 249		0000 101		0000 040	
5,0	0,000 0015									

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Таблица 2. Значения интегральной функции Лапласа  $\Phi(x)=$

x	$\Phi(x)$										
0,00	0,0000	0,50	0,1915	1,00	0,2413	1,50	0,4332	2,00	0,4772	3,00	0,49865
0	0,00	0	0,1	1	0,3	1	0,4	2	0,4	3	0,49

,01	40	,51	950	,01	438	,51	345	,02	783	,20	931
0	0,00	0	0,1	1	0,3	1	0,4	2	0,4	3	0,49
,02	80	,52	985	,02	461	,52	357	,04	793	,40	966
0	0,01	0	0,2	1	0,3	1	0,4	2	0,4	3	0,49
,03	20	,53	019	,03	485	,53	370	,06	803	,60	9841
0	0,01	0	0,2	1	0,3	1	0,4	2	0,4	3	0,49
,04	60	,54	054	,04	508	,54	382	,08	812	,80	9928
0	0,01	0	0,2	1	0,3	1	0,4	2	0,4	4	0,49
,05	99	,55	088	,05	531	,55	394	,10	821	,00	9968
0	0,02	0	0,2	1	0,3	1	0,4	2	0,4	4	0,49
,06	39	,56	123	,06	554	,56	406	,12	830	,50	9997
0	0,02	0	0,2	1	0,3	1	0,4	2	0,4	5	0,49
,07	79	,57	157	,07	577	,57	418	,14	838	,00	9997
0	0,03	0	0,2	1	0,3	1	0,4	2	0,4		
,08	19	,58	190	,08	599	,58	429	,16	846		
0	0,03	0	0,2	1	0,3	1	0,4	2	0,4		
,09	59	,59	224	,09	621	,59	441	,18	854		
0	0,03	0	0,2	1	0,3	1	0,4	2	0,4		
,10	98	,60	257	,10	643	,60	452	,20	861		
0	0,04	0	0,2	1	0,3	1	0,4	2	0,4		
,11	38	,61	291	,11	665	,61	463	,22	868		
0	0,04	0	0,2	1	0,3	1	0,4	2	0,4		
,12	78	,62	324	,12	686	,62	474	,24	875		
0	0,05	0	0,2	1	0,3	1	0,4	2	0,4		
,13	17	,63	357	,13	708	,63	484	,26	881		
0	0,05	0	0,2	1	0,3	1	0,4	2	0,4		
,14	57	,64	389	,14	729	,64	495	,28	887		
0	0,05	0	0,2	1	0,3	1	0,4	2	0,4		
,15	96	,65	422	,15	749	,65	505	,30	893		
0	0,06	0	0,2	1	0,3	1	0,4	2	0,4		
,16	36	,66	454	,16	770	,66	515	,32	898		
0	0,06	0	0,2	1	0,3	1	0,4	2	0,4		
,17	75	,67	486	,17	790	,67	525	,34	904		
0	0,07	0	0,2	1	0,3	1	0,4	2	0,4		
,18	14	,68	517	,18	810	,68	535	,36	909		
0	0,07	0	0,2	1	0,3	1	0,4	2	0,4		
,19	53	,69	549	,19	830	,69	545	,38	913		
0	0,07	0	0,2	1	0,3	1	0,4	2	0,4		
,20	93	,70	580	,20	849	,70	554	,40	918		
0	0,08	0	0,2	1	0,3	1	0,4	2	0,4		
,21	32	,71	611	,21	869	,71	564	,42	922		
0	0,08	0	0,2	1	0,3	1	0,4	2	0,4		
,22	71	,72	642	,22	883	,72	573	,44	927		
0	0,09	0	0,2	1	0,3	1	0,4	2	0,4		
,23	10	,73	673	,23	907	,73	582	,46	931		
0	0,09	0	0,2	1	0,3	1	0,4	2	0,4		
,24	48	,74	703	,24	925	,74	591	,48	934		
0	0,09	0	0,2	1	0,3	1	0,4	2	0,4		
,25	87	,75	734	,25	944	,75	599	,50	938		
0	0,10	0	0,2	1	0,3	1	0,4	2	0,4		
,26	26	,76	764	,26	962	,76	608	,52	941		
0	0,10	0	0,2	1	0,3	1	0,4	2	0,4		
,27	64	,77	794	,27	980	,77	616	,54	945		
0	0,11	0	0,2	1	0,3	1	0,4	2	0,4		
,28	03	,78	823	,28	997	,78	625	,56	948		
0	0,11	0	0,2	1	0,4	1	0,4	2	0,4		
,29	41	,79	852	,29	015	,79	633	,58	951		
0	0,11	0	0,2	1	0,4	1	0,4	2	0,4		
,30	79	,80	881	,30	032	,80	641	,60	953		
0	0,12	0	0,2	1	0,4	1	0,4	2	0,4		

,31	17	,81	910	,31	049	,81	649	,62	956		
0	0,12	0	0,2	1	0,4	1	0,4	2	0,4		
,32	55	,82	939	,32	066	,82	656	,64	959		
0	0,12	0	0,2	1	0,4	1	0,4	2	0,4		
,33	93	,83	967	,33	082	,83	664	,66	961		
0	0,13	0	0,2	1	0,4	1	0,4	2	0,4		
,34	31	,84	995	,34	099	,84	671	,68	963		
0	0,13	0	0,3	1	0,4	1	0,4	2	0,4		
,35	68	,85	023	,35	115	,85	678	,70	965		
0	0,14	0	0,3	1	0,4	1	0,4	2	0,4		
,36	06	,86	051	,36	131	,86	686	,72	967		
0	0,14	0	0,3	1	0,4	1	0,4	2	0,4		
,37	43	,87	078	,37	147	,87	693	,74	969		
0	0,14	0	0,3	1	0,4	1	0,4	2	0,4		
,38	80	,88	106	,38	162	,88	699	,76	971		
0	0,15	0	0,3	1	0,4	1	0,4	2	0,4		
,39	17	,89	133	,39	177	,89	706	,78	973		
0	0,15	0	0,3	1	0,4	1	0,4	2	0,4		
,40	54	,90	159	,40	192	,90	713	,80	974		
0	0,15	0	0,3	1	0,4	1	0,4	2	0,4		
,41	91	,91	186	,41	207	,91	719	,82	976		
0	0,16	0	0,3	1	0,4	1	0,4	2	0,4		
,42	28	,92	212	,42	222	,92	726	,84	977		
0	0,16	0	0,3	1	0,4	1	0,4	2	0,4		
,43	64	,93	238	,43	236	,93	732	,86	979		
0	0,17	0	0,3	1	0,4	1	0,4	2	0,4		
,44	00	,94	264	,44	251	,94	738	,88	980		
0	0,17	0	0,3	1	0,4	1	0,4	2	0,4		
,45	36	,95	289	,45	265	,95	744	,90	981		
0	0,17	0	0,3	1	0,4	1	0,4	2	0,4		
,46	72	,96	315	,46	279	,96	750	,92	982		
0	0,18	0	0,3	1	0,4	1	0,4	2	0,4		
,47	08	,97	340	,47	292	,97	756	,94	984		
0	0,18	0	0,3	1	0,4	1	0,4	2	0,4		
,48	44	,98	365	,48	306	,98	761	,96	985		
0	0,18	0	0,3	1	0,4	1	0,4	2	0,4		
,49	79	,99	389	,49	319	,99	767	,98	986		

$$p(k, \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

**Таблица 3.** Значения вероятностей распределения Пуассона

$\lambda \backslash$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4965	0,4493	0,4065
2	37	31	18	20	31	12	85	29	70
3	0,0904	0,1637	0,2222	0,2681	0,3032	0,3292	0,3476	0,3594	0,3659
4	84	46	45	28	65	87	10	63	13
5	0,0045	0,0163	0,0333	0,0536	0,0758	0,0987	0,1216	0,1437	0,1646
6	24	75	37	26	16	86	63	85	61
7	0,000	0,0010	0,0033	0,0071	0,0126	0,0197	0,0283	0,0383	0,0493
8	151	91	34	50	36	57	88	43	98
	0,0000	0,0000	0,0002	0,0007	0,0015	0,0029	0,0049	0,0076	0,0111
	04	55	50	15	80	64	68	69	15
		0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0006	0,0012	0,0020

$\lambda \backslash$	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,3678	0,1353	0,0497	0,0183	0,0067	0,0024	0,0009	0,0003	0,0001
1	79	35	87	16	38	79	12	35	23
2	0,3678	0,2706	0,1493	0,0732	0,0336	0,0148	0,0063	0,0026	0,0011
3	79	71	61	63	90	73	83	84	11
4	0,1839	0,2706	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0049
5	40	71	42	25	24	18	41	35	98
6	0,0613	0,1804	0,2240	0,1953	0,1403	0,0892	0,0521	0,0286	0,0149
7	13	47	42	67	74	35	29	26	94
8	0,0153	0,0902	0,1680	0,1953	0,1754	0,1338	0,0912	0,0572	0,0337
9	28	24	31	67	67	53	26	52	37
10	0,0030	0,0360	0,1008	0,1562	0,1754	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607
11	66	89	19	93	67	23	17	04	27
12	0,0005	0,0120	0,0504	0,1041	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0910
13	11	30	09	94	23	23	03	38	90
14	0,0000	0,0034	0,0216	0,0595	0,1044	0,1376	0,1490	0,1395	0,1171
15	73	37	04	40	45	77	03	87	16
16	0,0000	0,0008	0,0081	0,0297	0,0652	0,1032	0,1303	0,1395	0,1317
17	09	59	01	70	78	58	77	87	56
18	0,0000	0,0001	0,0027	0,0132	0,0362	0,0688	0,1014	0,1240	0,1317
19	01	91	01	31	66	38	05	07	56
20		0,0000	0,0008	0,0052	0,0181	0,0413	0,0709	0,0992	0,1185
21		38	10	92	33	03	83	62	80
22		0,0000	0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0451	0,0721	0,0970
23		07	21	25	42	29	71	90	20
24		0,0000	0,0000	0,0006	0,0034	0,0112	0,0263	0,0481	0,0727
25		01	55	42	34	62	50	27	65
26			0,000	0,0001	0,0013	0,0051	0,0141	0,0296	0,0503
27			013	97	21	99	88	16	76
			0,0000	0,0000	0,0004	0,0022	0,0070	0,0169	0,0323
			03	56	72	28	94	24	84
			0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0033	0,0090	0,0194
			01	15	57	91	11	26	31

